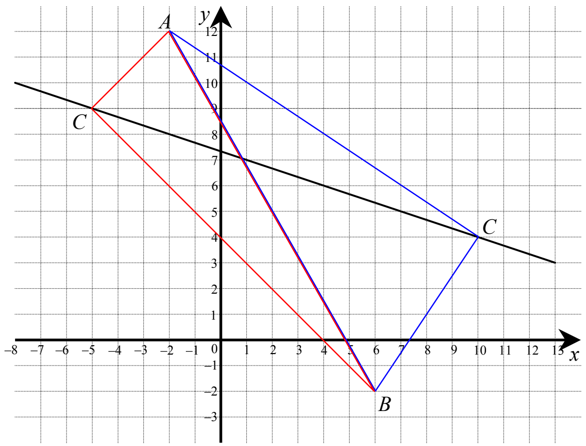
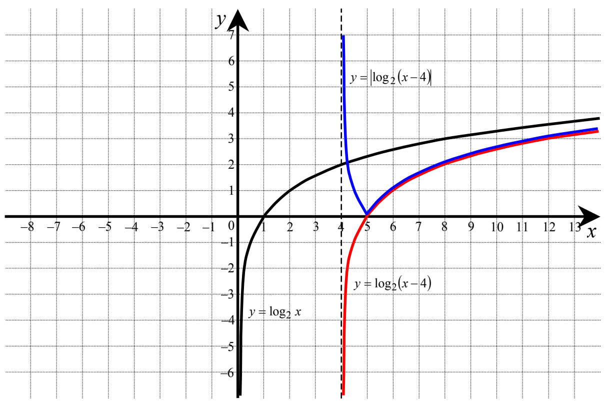
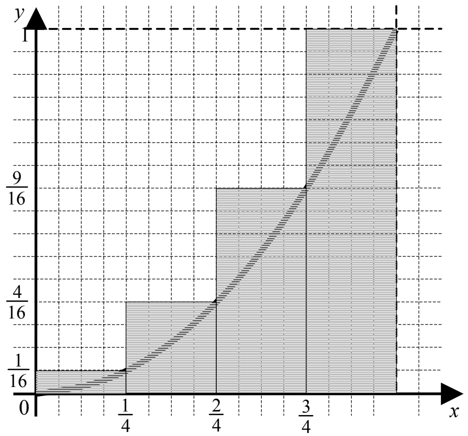
# ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA – ZESTAW NR 1
## POZIOM ROZSZERZONY

| Nr zadania | Nr czynności | Etapy rozwiązania zadania | Liczba punktów | Uwagi |
|---|---|---|---|---|
| | 1.1 | **I metoda rozwiązania („PITAGORAS”):**<br>Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych: np.<br> | 1 | • Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty $A$ i $B$. Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione.<br>• Współrzędne punktu $C$ można odczytać z rysunku, ale zdający musi sprawdzić, np. przez wstawienie do równania prostej prawidłowość odczytu. Przyznajemy pełna pulę punktów.<br>• W przypadku, gdy zdający poda odczytane współrzędne punktu $C$ i nie dokona sprawdzenia z warunkami zadania otrzymuje punkty tylko w czynnościach 1.1 i 1.5. |
| | 1.2 | Wprowadzenie oznaczenia współrzędnych punktu $C$, np.<br>$C=(22-3y,y)$ lub $C=\left(x,-\frac{1}{3}x+\frac{22}{3}\right)$ . | 1 | |
| | 1.3 | Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie warunku prostopadłości odcinków $AC$ i $BC$: $\lvert AC\rvert^2+\lvert BC\rvert^2=\lvert AB\rvert^2$ , w którym<br>$\lvert AC\rvert^2=10y^2-168y+720$, $\lvert BC\rvert^2=10y^2-92y+260$, $\lvert AB\rvert^2=260$<br>lub $\lvert AC\rvert^2=\frac{1}{9}\left(10x^2+64y+232\right)$, $\lvert BC\rvert^2=\frac{1}{9}\left(10x^2-164+1108\right)$. | 1 | |
| | 1.4 | Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą:<br>np. $y^2-13y+36=0$ lub $x^2-5x-50=0$. | 1 | |
| | 1.5 | Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C=\left(10,4\right)$ lub $C=\left(-5,9\right)$. | 1 | |

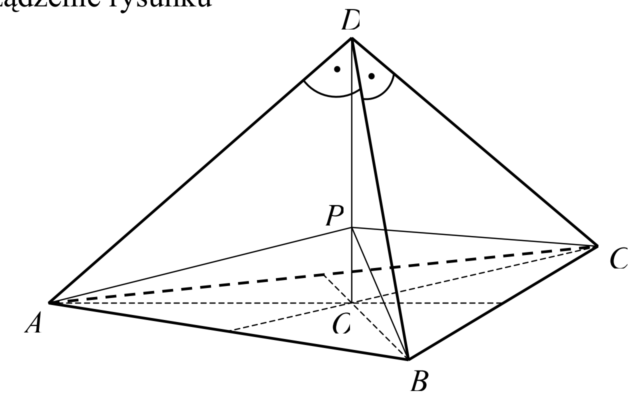
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1.1 | **II metoda rozwiązania („WEKTORY”):**<br>Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych. | 1 | Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty $A$ i $B$. Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione. |
| | 1.2 | Wprowadzenie oznaczeń pomocniczych i wyznaczenie wektorów:<br>np. $C=(22-3y,y)$, $\vec{CA}=[-24+3y,12-y]$, $\vec{CB}=[-16+3y,-2-y]$<br>lub $C=(x,-\frac{1}{3}x+\frac{22}{3})$, $\vec{CA}=[-2+x,\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}]$, $\vec{CB}=[6-x,\frac{1}{3}x-\frac{28}{3}]$. | 1 | |
| | 1.3 | Wykorzystanie warunku prostopadłości wektorów $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ i zapisanie równania: np.<br>$(-24+3y)(-16+3y)+(12-y)(-2-y)=0$, gdzie $y$ to rzędna punktu $C$<br>lub $-(2+x)(6-x)+\frac{1}{9}(x+14)(x-28)=0$, gdzie $x$ to odcięta punktu $C$. | 1 | |
| | 1.4 | Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą :<br>np. $y^2-13y+36=0$ lub $x^2-5x-50=0$. | 1 | |
| | 1.5 | Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi:<br>$C=(10,4)$ lub $C=(-5,9)$. | 1 | |
| | 1.1 | **III metoda rozwiązania („KONSTRUKCJA”):**<br>Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych. | 1 | Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty $A$ i $B$. Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione. |
| | 1.2 | Zapisanie równania okręgu o środku w punkcie $S=(2,5)$, który jest środkiem odcinka $AB$ i promieniu $r=\frac{1}{2}\lvert AB\rvert=\frac{1}{2}\sqrt{260}$:<br>$(x-2)^2+(y-5)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{260}\right)^2$. | 1 | |
| | 1.3 | Zapisanie układu równań:<br>$\begin{cases} x+3y=22 \\ (x-2)^2+(y-5)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{260}\right)^2 \end{cases}$. | 1 | |
| | 1.4 | Doprowadzenie obliczeń do postaci równania kwadratowego,<br>np.: $y^2-13y+36=0$ lub $x^2-5x-50=0$. | 1 | |

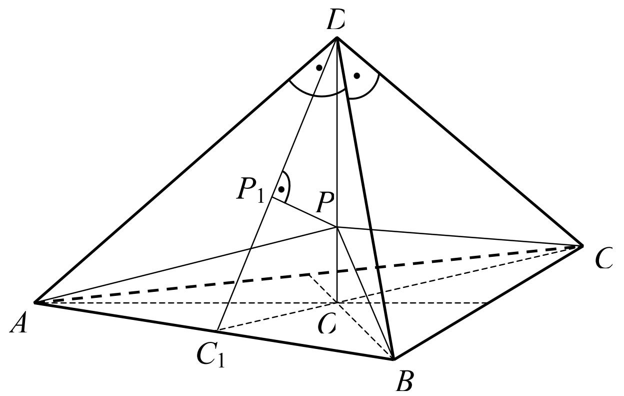
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1.5 | Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi:<br>$C=(10,4)$ lub $C=(-5,9)$. | 1 | |
| | | **Ogólnie, rozwiązanie powinno mieć postać:** | | |
| | 1.1 | **Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych.** | 1 | |
| | 1.2 | **Przedstawienie metody pozwalającej wyznaczyć punkt *C*.** | 1 | W metodzie II i III przestawione zostały czynności 1.2 i 1.3 i zapisane w kolejności takiej, jaka będzie miała miejsce w trakcie rozwiązania tą metodą. |
| | 1.3 | **Zapisanie warunków algebraicznych wynikających z obranej metody rozwiązania.** | 1 | |
| | 1.4 | **Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą.** | 1 | |
| | 1.5 | **Wyznaczenie współrzędnych punktów *C*.** | 1 | |
| 2 | 2.1 | Zapisanie wzoru funkcji $g$ w postaci $g(x)=\dfrac{a}{x+3}+2$ dla $x\neq -3$. | 1 | Przyznajemy punkt również wtedy, gdy zdający nie zapisze dziedziny funkcji *g*. |
| | 2.2 | Wyznaczenie współczynnika $a$ z równania $g(-4)=6$: $a=-4$. | 1 | |
| | 2.3 | Doprowadzenie nierówności $\dfrac{-4}{x+3}+2<4$ do postaci $\dfrac{-2x-10}{x+3}<0$. | 1 | |
| | 2.4 | Wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $g(x)<4$:<br>$x\in(-\infty,-5)\cup(-3,\infty)$. | 1 | |
| 3 | 3.1 | Zapisanie podstawy logarytmu: $p=2$. | 1 | |
| | 3.2 | Obliczenie wartości funkcji *f* dla argumentu $x=0{,}125$: $f(0{,}125)=-3$. | 1 | |
| | 3.3 | Narysowanie wykresu funkcji $y=f(x-4)$. | 1 | |
| | 3.4 | Narysowanie wykresu funkcji *g*<br> | 1 | W tej czynności oceniamy poprawność wykonania przekształcenia $y=\lvert f(x)\rvert$. Punkt przyznajemy trównież wtedy, gdy zdający niepoprawnie wykona przesunięcie, ale poprawnie wykona przekształcenie $y=\lvert f(x)\rvert$.<br>Jeśli zdający od razu narysuje wykres funkcji g, to przyznajemy punkt w czynnościach 3.3 i 3.4. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3.5 | Podanie miejsca zerowego funkcji *g*: $x=5$. | 1 | Czynność 3.5 oceniamy konsekwentnie do uzyskanej przez zdającego funkcji *g*. |
| | 4.1 | Wyrażenie funkcji $\mathrm{tg}\alpha$ w zależności od *a* i *H*: $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{H}=\frac{a}{2H}$. | 1 | |
| | 4.2 | Wyrażenie funkcji $\cos\alpha$ w zależności od *a* i *h*: $\cos\alpha=\frac{h}{a}$. | 1 | |
| | 4.3 | Wykorzystanie wyznaczonych zależności i doprowadzenie podanego w treści zadania związku $a^2=H\cdot h$ do zależności z jedną zmienną $\alpha$: np. $\frac{\frac{a}{2}}{H}=\mathrm{tg}\alpha$ stąd $H=\frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}$, $\frac{h}{a}=\cos\alpha$ stąd $h=a\cos\alpha$; po podstawieniu otrzymujemy $2\mathrm{tg}\alpha=\cos\alpha$. | 1 | |
| | 4.4 | Doprowadzenie zależności do postaci równania, w którym jest tylko jedna funkcja trygonometryczna, np.: $2\sin\alpha=1-\sin^2\alpha$ dla $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. | 1 | |
| 4 | 4.5 | Rozwiązanie równania, np. dokonanie podstawienia $t=\sin\alpha$ i rozwiązanie równania kwadratowego $t^2+2t-1=0$: $t=-1-\sqrt{2}$ oraz $t=-1+\sqrt{2}$. | 1 | |
| | 4.6 | Odrzucenie ujemnego pierwiastka i podanie odpowiedzi: $\sin\alpha=\sqrt{2}-1$. | 1 | Jeśli zdający nie wskaże właściwego rozwiązania spełniającego warunki zadania, to nie otrzymuje punktu za tę czynność. |
| | 4.3 | **II sposób rozwiązania (czynności 4.3 i 4.4)** Zapisanie wyrażenia $a^2=H\cdot h$ w postaci proporcji $\frac{a}{H}=\frac{h}{a} \Leftrightarrow 2\cdot\frac{\frac{1}{2}a}{H}=\frac{h}{a}$. | 1 | |
| | 4.4 | Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych do zapisania proporcji w postaci równania jednej zmiennej: $2\cdot\frac{\frac{1}{2}a}{H}=2\cdot\mathrm{tg}\alpha$, $\frac{h}{a}=\cos\alpha$ stąd $\frac{a}{H}=\frac{h}{a}$, $2\cdot\mathrm{tg}\alpha=\cos\alpha$, $\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$ dla $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. | 1 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 5.1 | Sporządzenie rysunku dla $n = 4$.<br><br> | 1 | |
| | 5.2 | Obliczenie sumy pól czterech prostokątów:<br>$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^2=\frac{15}{32}$. | 1 | |
| | 5.3 | Obliczenie sumy pól wszystkich $n$ prostokątów w postaci:<br>$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. | 1 | Wystarczy, że zdający poprawnie zapisze lewą stronę podanej postaci. |
| | 5.4 | Wykorzystanie podanej tożsamości i przekształcenie sumy do postaci:<br>$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ lub $S_n=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. | 1 | |
| 6 | 6.1 | Zapisanie wielomianu w postaci: $W(x)=x^4-2x^3+x^2+x^2-6x+9$. | 1 | |
| | 6.2 | Zapisanie wielomianu w postaci sumy dwóch składników nieujemnych:<br>np. $W(x)=x^2(x-1)^2+(x-3)^2$ lub $W(x)=(x^2-x)^2+(x-3)^2$. | 1 | |
| | 6.3 | Uzasadnienie, że oba składniki są nieujemne i nie mogą być jednocześnie równe 0, więc wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. | 1 | |
| | 6.1 | **II metoda rozwiązania:**<br>Obliczenie pochodnej wielomianu $W(x)$ i jej miejsca zerowego:<br>$W'(x)=2(2x-3)(x^2+1)$, $x=\frac{3}{2}$. | 1 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6.2 | Uzasadnienie, że w punkcie $x=\frac{3}{2}$ wielomian $W(x)$ osiąga lokalne minimum. | 1 | |
| | 6.3 | Obliczenie wartości wielomianu $W(x)$ dla $x=\frac{3}{2}$ albo jej oszacowanie z dołu przez liczbę dodatnią i uzasadnienie, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych: $W\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{45}{16}$. | 1 | |
| 7 | 7.1 | Zapisanie równania $f(x)=1$ w postaci: $-\cos^2 x+\cos x=0$. | 1 | |
| | 7.2 | Zapisanie równań: $\cos x=0$ lub $\cos x=1$. | 1 | |
| | 7.3 | Zapisanie rozwiązań równania $f(x)=1$ należących do przedziału $\langle 0,\ 2\pi\rangle$: $x=0 \vee x=\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{3\pi}{2} \vee x=2\pi$. | 1 | |
| | 7.4 | Przedstawienie metody rozwiązania zadania, np. wprowadzenie pomocniczej niewiadomej $t=\cos x$ i $t\in\langle -1,1\rangle$ i zapisanie funkcji $f(t)=-t^2+t+1$ dla $t\in\langle -1,1\rangle$. | 1 | Punkt otrzymuje też zdający, który pominął dziedzinę funkcji *f*. |
| | 7.5 | Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem trójmianu kwadratowego $f(t)=-t^2+t+1$: $t_w=\frac{1}{2}$. | 1 | Wystarczy, że zdający zapisze trójmian w postaci kanonicznej: $f(t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$. |
| | 7.6 | Uwzględnienie faktu, że $\frac{1}{2}\in\langle -1,1\rangle$ i współczynnik przy $t^2$ jest ujemny, i obliczenie największej wartości funkcji $f$: $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$ | 1 | Zdający nie musi analizować znaku współczynnika przy $t^2$, o ile oblicza $f(-1)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i wybiera największą z nich. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 8.1 | **I metoda rozwiązania:**<br>Sporządzenie rysunku<br><br> | 1 | Zdający może pominąć uzasadnienie, że punkt $P$ leży na wysokości $DO$. |
| | 8.2 | Obliczenie długości krawędzi bocznej ostrosłupa: $a=1$. | 1 | |
| | 8.3 | Obliczenie objętości ostrosłupa $ABCD$, np. poprzez stwierdzenie, że dany ostrosłup to „naroże” sześcianu o krawędzi długości 1: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}$. | 1 | |
| | 8.4 | Zapisanie równania z niewiadomą $H$ – szukaną odległością:<br>$3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot H+\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{1}{6}$. | 1 | Wystarczy że zdający zapisze, że objętość ostrosłupa jest sumą objętości czterech ostrosłupów, których podstawami są ściany danego ostrosłupa, a wysokością szukana odległość . |
| | 8.5 | Obliczenie szukanej odległości: $H=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. | 1 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 8.1 | **II metoda rozwiązania:**<br>Sporządzenie rysunku:<br><br>$P_1$ jest rzutem punktu $P$ na wysokość ściany bocznej $DC_1$. | 1 | |
| | 8.2 | Obliczenie długości $DC_1$: $\lvert DC_1\rvert = \frac{1}{2}\lvert AB\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$. | 1 | |
| | 8.3 | Wyznaczenie $\lvert DO\rvert$ z trójkąta $DOC_1$: np. $\lvert DO\rvert^2 = \lvert DC_1\rvert^2 - \lvert OC_1\rvert^2$, gdzie<br>$\lvert OC_1\rvert = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, stąd $\lvert DO\rvert = \frac{\sqrt{3}}{3}$. | 1 | |
| | 8.4 | Zapisanie równania z niewiadomą $H$, np. z podobieństwa trójkątów<br>$\Delta PP_1D \sim \Delta DOC_1$ wynika proporcja $\frac{\lvert PP_1\rvert}{\lvert DP\rvert} = \frac{\lvert OC_1\rvert}{\lvert DC_1\rvert}$ i $\lvert PP_1\rvert = H$,<br>$\frac{H}{\frac{\sqrt{3}}{3} - H} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. | 1 | |
| | 8.5 | Obliczenie szukanej odległości: $H = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. | 1 | |
| 9 | 9.1 | Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert = 8!$. | 1 | |
| | 9.2 | Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu $A$, że jako pierwsze pójdą kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem: $\lvert A\rvert = 3!\cdot 3! = 36$. | 1 | Wystarczy zapis $\lvert A\rvert = 3!\cdot 3!$ lub $\lvert A\rvert = 36$. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 9.3 | Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A$: $P(A)=\frac{3!\cdot 3!}{8!}=\frac{1}{1120}$. | 1 | |
| | 9.4 | Porównanie otrzymanego prawdopodobieństwa z 0,001, np.: $P(A)=\frac{1}{1120}<\frac{1}{1000}$ lub $P(A)\approx 0{,}0009<0{,}001$. | 1 | |
| 10 | 10.1 | Zapisanie układu pozwalającego wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty $(x_n,0)$, $(-1,1)$, $(0,y_n)$: $\begin{cases}1=-a+b\\0=a(-1-n)+b\end{cases}$. | 1 | |
| | 10.2 | Wyznaczenie z układu niewiadomej $b$: np. $b=1+\frac{1}{n}$. | 1 | |
| | 10.3 | Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$. | 1 | |
| | 10.1 | **II metoda rozwiązania:** Zapisanie współczynnika kierunkowego prostej $X_nP$ (przechodzącej przez punkty $(x_n,0)$ i $P$): $a=\frac{1}{-1-(-1-n)}=\frac{1}{n}$. | 1 | |
| | 10.2 | Zapisanie równania prostej $X_nP$: $y=\frac{1}{n}(x+1)+1$. | 1 | |
| | 10.3 | Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$. | 1 | |
| | 10.1 | **III metoda rozwiązania:** Wprowadzenie oznaczeń: $A=(x_n,0)$, $P=(-1,1)$, $C=(0,y_n)$. Wyznaczenie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{AP}=[n,1]$, $\overrightarrow{PC}=[1,y_n-1]$. | 1 | |
| | 10.2 | Zapisanie warunku równoległości wektorów: $\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{PC}\Leftrightarrow d\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PC}\right)=0$ stąd $n(y_n-1)-1=0$. | 1 | |
| | 10.3 | Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$. | 1 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 10.1 | **IV metoda rozwiązania:**<br>Wprowadzenie oznaczeń: $A=(x_n,0)$, $P=(-1,1)$, $C=(0,y_n)$.<br>Wykorzystanie zależności: $\lvert AP\rvert+\lvert PC\rvert=\lvert AC\rvert$,<br>$\sqrt{(-1-x_n)^2+(1-0)^2}+\sqrt{(0+1)^2+(y_n-1)^2}=\sqrt{(0-x_n)^2+(y_n-0)^2}$. | 1 | |
| | 10.2 | Podstawienie $x_n=-1-n$ i doprowadzenie wyrażenia do postaci:<br>$(n\cdot y_n-n-1)^2=0$. | 1 | |
| | 10.3 | Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$. | 1 | |
| 11 | 11.1 | Przyjęcie oznaczeń, wykorzystanie definicji lub własności ciągu geometrycznego i zapisanie zależności między długościami boków trójkąta prostokątnego, np.: $a$, $b$, $c$ – długości boków trójkąta prostokątnego i $a<b<c$, $b=a\cdot q$, $c=a\cdot q^2$ lub $b^2=ac$. | 1 | |
| | 11.2 | Wykorzystanie twierdzenie Pitagorasa i zapisanie równania, w którym występują najwyżej dwie niewiadome, np.: $a^2+(aq)^2=(aq^2)^2$ lub $a^2+ac=c^2$. | 1 | |
| | 11.3 | Zapisanie równania, np.: $q^4-q^2-1=0$ lub $\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}-1=0$. | 1 | |
| | 11.4 | Wykonanie podstawienia $t=q^2$ lub $t=\frac{c}{a}$ i rozwiązanie równania<br>$t^2-t-1=0$: $t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\vee t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. | 1 | |
| | 11.5 | Obliczenie ilorazu ciągu: $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. | 1 | |